Colle du 18/01 - Sujet 1
Ensembles applications, limites et analyse asymptotique

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. La fonction $x \mapsto \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\tan(x)}$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que si f est bijective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que si f est surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Montrer que si f est injective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 18/01 - Sujet 2
Ensembles applications, limites et analyse asymptotique

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'encadrement.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E), \qquad f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow A \subseteq B.$$

Exercice 2. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 18/01 - Sujet 3
Ensembles applications, limites et analyse asymptotique

Question de cours. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient A, F et G trois ensembles, $u : E \to F$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(A, E) & \to & \mathscr{F}(A, F) \\ f & \mapsto & u \circ f \end{array}$$

1. Montrer que u est injective si et seulement si φ est injective.
2. Montrer que u est surjective si et seulement si φ est surjective.